Численные методы

Denis Bakin

План

1. Что такое численные методы и зачем они нужны
2. Нули функции: метод половинного деления (бисекции)
3. Экстремумы: адаптация метода бисекции
4. Площадь под графиком: способы приближения
5. Длина кривой

Зачем нужны численные методы?

- π, e — трансцендентные числа, бесконечные дроби
- $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$
- На практике нужна конечная точность: $\pi \approx 3.14159$, $\frac{1+2\sqrt{5}}{3} \approx 1.824$

Зачем нужны численные методы?

- π, e — трансцендентные числа, бесконечные дроби
- $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$
- На практике нужна конечная точность: $\pi \approx 3.14159$, $\frac{1+2\sqrt{5}}{3} \approx 1.824$

Численные методы — приёмы, позволяющие реализовать математические определения за конечное число операций с числами

Нули функции

Постановка задачи

Нуль функции $f(x)$ — корень уравнения $f(x) = 0$

Задача: найти x_* с точностью ε на отрезке $[a; b]$, содержащем ровно один нуль x_0

$$|x_* - x_0| < \varepsilon$$

Метод половинного деления: идея

Метод половинного деления: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка

Метод половинного деления: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка
- Проверяем: $f(a) \cdot f(m) < 0$?

Метод половинного деления: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка
- Проверяем: $f(a) \cdot f(m) < 0$?
  - Да $\to$ f меняет знак на $[a; m]$, нуль слева: $b = m$

Метод половинного деления: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка
- Проверяем: $f(a) \cdot f(m) < 0$?
  - Да $\to$ f меняет знак на $[a; m]$, нуль слева: $b = m$
  - Нет $\to$ нуль справа: $a = m$

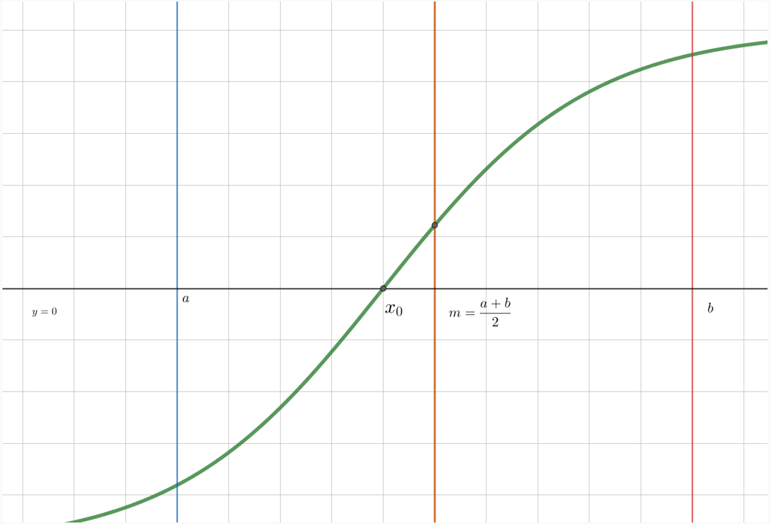
Метод половинного деления: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка
- Проверяем: $f(a) \cdot f(m) < 0$?
  - Да $\to$ f меняет знак на $[a; m]$, нуль слева: $b = m$
  - Нет $\to$ нуль справа: $a = m$
- Повторяем, пока $|b - a| > \varepsilon$

Метод половинного деления: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$ — середина отрезка
- Проверяем: $f(a) \cdot f(m) < 0$?
  - Да $\to$ f меняет знак на $[a; m]$, нуль слева: $b = m$
  - Нет $\to$ нуль справа: $a = m$
- Повторяем, пока $|b - a| > \varepsilon$
- Ответ: $x_* = \frac{a+b}{2}$

Метод бисекции: иллюстрация



Также метод называют **дихотомией** или **бисекцией**

Метод бисекции: сложность

Метод бисекции: сложность

Каждая итерация уменьшает отрезок вдвое: $L_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k L_0$

Метод бисекции: сложность

Каждая итерация уменьшает отрезок вдвое: $L_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k L_0$

$$n = O\left(\log \frac{b-a}{\varepsilon}\right)$$

Логарифмическая сложность — для любой точности ε найдётся приближённый корень за конечное число шагов

Метод бисекции: шаблон кода

```
double findRoot(FunctionParser& function,
                double left, double right, double eps) {
    while (/* условие: отрезок достаточно велик */) {
        double mid = /* ? */;
        if (/* f меняет знак на [left, mid] */) {
            /* обновляем границу */
        } else {
            /* обновляем границу */
        }
    }
    return /* приближённое значение нуля */;
}
```

Экстремумы функции

Унимодальная функция — имеет ровно один экстремум на отрезке

Экстремум (максимум):

$$x_0\text{-}\max \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0 : \ \forall\, x \in [x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] : \ f(x) < f(x_0)$$

В случае максимума: функция возрастает до x_0 и убывает после

Поиск экстремума: идея

Поиск экстремума: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$, $x_1 := m - \delta$, $x_2 := m + \delta$, где $\delta \approx 10^{-5}$

Поиск экстремума: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2},\ \ x_1 := m - \delta,\ \ x_2 := m + \delta$, где $\delta \approx 10^{-5}$
- $f(x_1) < f(x_2) \to$ функция возрастает, максимум правее: $a = x_1$

Поиск экстремума: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$, $x_1 := m - \delta$, $x_2 := m + \delta$, где $\delta \approx 10^{-5}$
- $f(x_1) < f(x_2) \rightarrow$ функция возрастает, максимум правее: $a = x_1$
- $f(x_1) > f(x_2) \rightarrow$ функция убывает, максимум левее: $b = x_2$

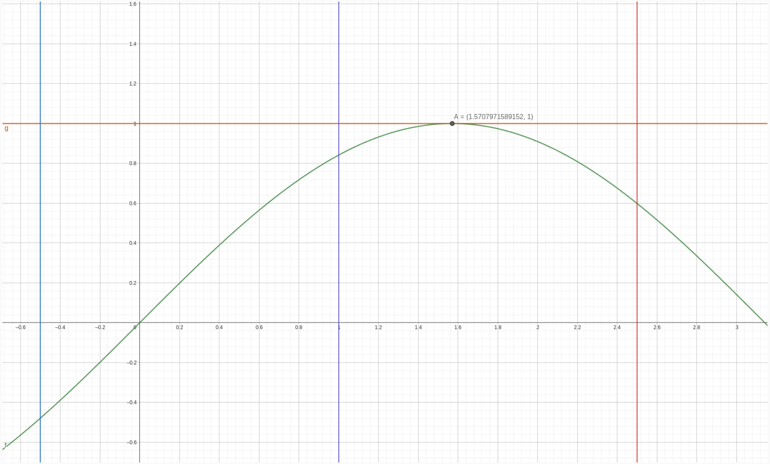
Поиск экстремума: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$, $x_1 := m - \delta$, $x_2 := m + \delta$, где $\delta \approx 10^{-5}$
- $f(x_1) < f(x_2) \to$ функция возрастает, максимум правее: $a = x_1$
- $f(x_1) > f(x_2) \to$ функция убывает, максимум левее: $b = x_2$
- Повторяем, пока $|b - a| > \varepsilon$

Поиск экстремума: алгоритм

- $m := \frac{a+b}{2}$, $x_1 := m - \delta$, $x_2 := m + \delta$, где $\delta \approx 10^{-5}$
- $f(x_1) < f(x_2) \to$ функция возрастает, максимум правее: $a = x_1$
- $f(x_1) > f(x_2) \to$ функция убывает, максимум левее: $b = x_2$
- Повторяем, пока $|b - a| > \varepsilon$
- Ответ: $x_{max} = \frac{a+b}{2}$

Поиск экстремума: иллюстрация



Что изменилось по сравнению с нулями?

- Метрика: вместо знака f сравниваем значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$
- Две пробные точки вместо одной (в окрестности середины)

Что изменилось по сравнению с нулями?

- Метрика: вместо знака f сравниваем значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$
- Две пробные точки вместо одной (в окрестности середины)
- Асимптотика та же: $O\left(\log \frac{b-a}{\varepsilon}\right)$

Площадь под графиком

Задача

Определённый интеграл $\approx$ площадь под графиком функции

- Точное аналитическое вычисление возможно не всегда
- Идея: разбить $[a; b]$ на n частей, приблизить f на каждом отрезке простой функцией

Приближение функции на отрезке

На каждом $[x_i; x_{i+1}]$ задаём $f_{approx}(x)$:

1. $f_{approx}(x) := f(x_i)$ — левый прямоугольник

Приближение функции на отрезке

На каждом $[x_i; x_{i+1}]$ задаём $f_{approx}(x)$:

1. $f_{approx}(x) := f(x_i)$ — левый прямоугольник
2. $f_{approx}(x) := f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ — средний прямоугольник

Приближение функции на отрезке

На каждом $[x_i; x_{i+1}]$ задаём $f_{approx}(x)$:

1. $f_{approx}(x) := f(x_i)$ — левый прямоугольник
2. $f_{approx}(x) := f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ — средний прямоугольник
3. $f_{approx}(x) := f(x_i) + \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}(x - x_i)$ — трапеция

Приближение функции на отрезке

На каждом $[x_i; x_{i+1}]$ задаём $f_{approx}(x)$:

1. $f_{approx}(x) := f(x_i)$ — левый прямоугольник
2. $f_{approx}(x) := f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$ — средний прямоугольник
3. $f_{approx}(x) := f(x_i) + \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{h}(x - x_i)$ — трапеция
4. $f_{approx}(x) := f(x_{i+1})$ — правый прямоугольник

Метод прямоугольников

Площадь прямоугольника: $S_i = f_{approx} \cdot h$

- Левые: $S = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$
- Правые: $S = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$
- Средние: $S = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$

Метод трапеций: идея

Метод трапеций: формула

Шаг $h = \frac{b-a}{n}$, точки $x_0 = a,\ x_1,\ \ldots,\ x_n = b$

Площадь одной трапеции: $S_i = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \cdot h$

Метод трапеций: формула

Шаг $h = \frac{b-a}{n}$, точки $x_0 = a,\ x_1,\ \dots,\ x_n = b$

Площадь одной трапеции: $S_i = \frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \cdot h$

Суммарная площадь:

$$S = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Все методы: $O(n)$

Длина кривой

Задача

Длина кривой $y = f(x)$ на $[a; b]$ — ещё одна величина, вычислимая приближённо

- Та же идея: заменить кривую ломаной из n хорд
- Используем линейное приближение (метод 3), но измеряем длину, а не площадь

Длина кривой: идея

Длина кривой: формула

Длина хорды на $[x_i; x_{i+1}]$:

$$\ell_i = \sqrt{h^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

Длина кривой: формула

Длина хорды на $[x_i; x_{i+1}]$:

$$\ell_i = \sqrt{h^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

Приближённая длина кривой:

$$L \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{h^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

Сложность: $O(n)$

Итоги

- Численные методы позволяют решать математические задачи за конечное число операций
- Метод бисекции находит нули функции за $O\left(\log \frac{b-a}{\varepsilon}\right)$
- Для поиска экстремума достаточно изменить критерий выбора половины отрезка
- Площадь под графиком: прямоугольники и трапеции — $O(n)$
- Длина кривой: сумма длин хорд — $O(n)$